Υπενθύμιση:

- $2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b) \overset{\text{για } b=a=x}{\rightsquigarrow} \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
- $2\cos a\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b) \overset{\text{για } b=a=x}{\rightsquigarrow} \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
- $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

Παραδείγματα:

1) $I = \int \sin(3x)\sin(7x)\,dx = \int \frac{1}{2}\left(\cos(4x) - \cos(10x)\right)dx = \frac{1}{2}\frac{\sin(4x)}{4} - \frac{1}{2}\frac{\sin(10x)}{10} + c.$

2) $I = \int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + c.$

3) $I = \int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$

$= \int \frac{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}\,dx = \int \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\,\frac{1+\cos(4x)}{2}\,dx =$

$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + c.$

4) $I = \int \sin^5 x\,dx = \int \sin^4 x\cdot\sin x\,dx = \int (\sin^2 x)^2\cdot\sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx.$

Θέτουμε $y = \cos x$ επομένως $dy = -\sin x\,dx$.

Έτσι, το ολοκλήρωμα ανάγεται στο:

$-\int (1-y^2)^2\,dy = -\int (y^4 - 2y^2 + 1)\,dy = -\frac{y^5}{5} + \frac{2y^3}{3} - y + c.$

Άρα, $\int \sin^5 x\,dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2\cos^3 x}{3} - \cos x + c.$

Με την ίδια μέθοδο υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα της μορφής
$I = \int \cos^n x \sin^m x\,dx$ όπου το ένα από τα $n, m$ είναι περιττός και το άλλο άρτιος.

5) $I = \int \tan^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx =$

$= \int \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$

$= \tan x - x + c.$

▶ Τριγωνομετρικές Αντικαταστάσεις για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, που περιέχουν τις παραστάσεις $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ ή $\sqrt{x^2+a^2}$. $(a>0)$.

α) Για ολοκληρώματα που περιέχουν την παράσταση $\sqrt{a^2-x^2}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση $x = a\cos t$. ($\Leftrightarrow \cos t = \frac{x}{a} \Leftrightarrow t = \arccos\frac{x}{a}$)

Τότε, $dx = -a\sin t\,dt$, ενώ, $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\cos^2 t} = a\sqrt{\sin^2 t} = a|\sin t| = a\sin t$ (γιατί $0<t<\pi$)

π.χ.

$I = \int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$ Θέτουμε $x = 2\cos t \Leftrightarrow t = \arccos\frac{x}{2}$

Τότε, $dx = -2\sin t\,dt$, ενώ, $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\cos^2 t} = 2|\sin t| = 2\sin t$.

Οπότε, το ολοκλήρωμα ανάγεται στο εξής:

$$\int \frac{1}{4\cos^2 t\, 2\sin t}(-2\sin t)\,dt = -\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = -\frac{1}{4}\tan t + c.$$

Πρέπει το αποτέλεσμα να είναι συνάρτηση του $x$.

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{2\sin t}{2\cos t} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}.$$

Επομένως, $I = \int\frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c.$

β) Για ολοκληρώματα που περιέχουν την παράσταση $\sqrt{x^2-a^2}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση $x = \frac{a}{\cos t}$. ($x>a$ ή $x<-a$)

Τότε, $dx = \frac{a\sin t}{\cos^2 t}\,dt$, ενώ, $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t}} = a\frac{\sin t}{\cos t} = a\tan t.$

π.χ.

$I = \int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$ Θέτουμε $x = \frac{3}{\cos t}$

Τότε, $dx = \frac{3\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \frac{3\tan t}{\cos t}\,dt$, ενώ $\sqrt{x^2-9} = 3\tan t$.

Οπότε το ολοκλήρωμα ανάγεται στο εξής:

$$\int 3\tan t\,\frac{\cos t}{3}\cdot\frac{3\tan t}{\cos t}\,dt = \int 3\tan^2 t\,dt = 3\int\tan^2 t\,dt = 3\tan t - 3t + c.$$

Πρέπει το αποτέλεσμα να είναι συνάρτηση του $x$

$\tan t = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}$

και $t = \arctan\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}$. Επομένως, $I = \int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$ [illegible] γ) Για ολοκληρώματα που περιέχουν την παράσταση $\sqrt{x^2+a^2}$, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την αντικατάσταση $x = a\tan t \Leftrightarrow \tan t = \frac{x}{a} \Leftrightarrow t = \arctan\frac{x}{a}$

Τότε, $dx = a\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt$, ενώ, $\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}+a^2} = a\cdot\frac{1}{\cos t}$.

Π.χ.

$I = \int\frac{\sqrt{x^2+25}}{x^4}dx$ Θέτουμε $x = 5\tan t \Leftrightarrow t = \arctan\left(\frac{x}{5}\right)$.

Τότε, $dx = 5\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt$, ενώ, $\sqrt{x^2+25} = 5\cdot\frac{1}{\cos t}$.

Οπότε, το ολοκλήρωμα ανάγεται στο εξής:

$$\int\frac{5}{\cos t}\cdot\frac{1}{5^4\tan^4 t}\cdot 5\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{25}\int\frac{1}{\cos^3 t}\cdot\frac{\cos^4 t}{\sin^4 t}dt = \frac{1}{25}\int\frac{\cos t}{\sin^4 t}dt =$$

$$= \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{(-3)}\cdot\frac{1}{\sin^3 t} = -\frac{1}{75}\cdot\frac{1}{\sin^3 t} + c.$$

Πρέπει το αποτέλεσμα να είναι συνάρτηση του x.

$\tan t = \frac{x}{5}$  $\sin t = \tan t\cdot\cos t = \frac{x}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{x^2+25}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}}$

Επομένως, $I = \int\frac{\sqrt{x^2+25}}{x^4}dx = -\frac{1}{75}\cdot\frac{(x^2+25)^{3/2}}{x^3} + c$.

▶ Ολοκληρώματα Ρητών Συναρτήσεων.

Ρητή ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $\frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα.

1ο Βήμα: Διαίρεση Πολυωνύμων.

Αν ο βαθμός του $P(x)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού του $Q(x)$ ($\deg P(x) \geq \deg Q(x)$), εκτελούμε τη διαίρεση των πολυωνύμων. (Αν $\deg P(x) < \deg Q(x)$ παραλείπεται το βήμα.)

$P(x) = Q(x)\cdot\pi(x) + υ(x)$ όπου είτε $υ(x) = 0$, είτε $υ(x) \neq 0$ και $\deg υ(x) < \deg Q(x)$

Έτσι, $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\frac{Q(x)\cdot\pi(x)+υ(x)}{Q(x)}dx = \int\left(\pi(x) + \frac{υ(x)}{Q(x)}\right)dx$ — $\deg υ(x) < \deg Q(x)$

ολοκλήρωμα πολυωνύμου

Απομένει να δούμε πως ολοκληρώνουμε $\frac{P(x)}{Q(x)}$ με $\deg P(x) < \deg Q(x)$.

**2º Βήμα:** Παραγοντοποίηση του Παρονομαστή.

Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές (αποδεικνύεται ότι) αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβαθμίων και δευτεροβαθμίων ανάγωγων πολυωνύμων

$$Q(x) = a(x-a_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_k)^{n_k} \cdot (x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+\beta_\lambda x+\gamma_\lambda)^{m_\lambda}$$

όπου $a$ ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου,

$a_1, a_2, \ldots, a_k$ οι ρίζες του πολυωνύμου,

με $n_1, n_2, \ldots, n_k$ η πολλαπλότητα της κάθε ρίζας,

και κάθε ένα από τα πολυώνυμα $(x^2+\beta_i x+\gamma_i)$, $i=1,\ldots,\lambda$, έχει αρνητική διακρίνουσα.

(Αν ήμασταν στους μιγαδικούς, $x^2+\beta_i x+\gamma_i = (x-z_i)(x-\bar{z}_i)$)

Για τους βαθμούς $n_1+\ldots+n_k+2m_1+\ldots+2m_\lambda = \deg Q(x)$

**3º Βήμα:** Ανάλυση σε απλά κλάσματα. ($\deg P(x) < \deg Q(x)$)

Χ.β.γ. υποθέτω πως $a=1$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)} + \ldots + \frac{A_{1n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} + \ldots + \frac{A_{k1}}{(x-a_k)} + \ldots + \frac{A_{kn_k}}{(x-a_k)^{n_k}} +$$

$$+ \frac{B_{11}x+\Gamma_{11}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)} + \ldots + \frac{B_{1m_1}x+\Gamma_{1m_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{m_1}} + \ldots + \frac{B_{\lambda 1}x+\Gamma_{\lambda 1}}{(x^2+\beta_\lambda x+\gamma_\lambda)} + \ldots + \frac{B_{\lambda m_\lambda}x+\Gamma_{\lambda m_\lambda}}{(x^2+\beta_\lambda x+\gamma_\lambda)^{m_\lambda}}.$$

Πώς βρίσκουμε τους συντελεστές;

Κάνοντας ομώνυμα τα κλάσματα στο δεύτερο μέλος και εκτελώντας τις πράξεις, ο παρονομαστής θα είναι $Q(x)$.

Εξισώνοντας τους συντελεστές των πολυωνύμων στους αριθμητές, και λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε τους άγνωστους συντελεστές.

Έτσι, το αρχικό ολοκλήρωμα έχει αναχθεί στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής α) $\int \frac{1}{(x-a)^k}dx$ και β) $\int \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}dx$

α) $\int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx = \begin{cases} \xrightarrow{k=1} = \log|x-a| + c \\ \xrightarrow{k\geq 2} = -\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + c \end{cases}$

β) $\int \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx$ Το $Bx+\Gamma$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός, με πραγματικούς συντελεστές, των πολυωνύμων $2x+\beta$ και $1$.

Δηλαδή, $Bx+\Gamma = \Delta(2x+\beta) + E\cdot 1$.

Βρίσκουμε ότι $\Delta = \frac{B}{2}$ και $E = \Gamma - \frac{\beta}{2}B$.

Έτσι, $Bx+\Gamma = \frac{B}{2}(2x+\beta) + \Gamma - \frac{\beta}{2}B$.

Οπότε, αναγόμαστε στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων:

(i) $\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx$ και (ii) $\int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx$

Το (i) υπολογίζεται άμεσα θέτοντας $y = x^2+\beta x+\gamma$ άρα $dy = (2x+\beta)dx$

$$\int \frac{dy}{y^k} = -\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{y^{k-1}} + c.$$

Έτσι, $\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx = -\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^{k-1}} + c.$

Για τον υπολογισμό του (ii) $\int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx$

$$x^2+\beta x+\gamma = x^2 + 2\frac{\beta}{2}x + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma = \left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4}$$

Κάνοντας κατάλληλη αντικατάσταση: $x + \frac{\beta}{2} = \sqrt{\gamma - \frac{\beta^2}{4}}\,y$.

Το ολοκλήρωμα ανάγεται στο: $\int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy$.

Υπολογισμός του $I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy$

Γνωρίζουμε πως $I_1 = \arctan y\,(+c)$.

Για $k\geq 2$: $I_{k-1} = \int \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\,dy = \int (y)'\,(y^2+1)^{-(k-1)}\,dy =$

$= \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} - \int y\cdot(-(k-1))(y^2+1)^{-k}\cdot 2y\,dy = \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + (2k-2)\int \frac{y^2}{(y^2+1)^k}\,dy =$

$= \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + (2k-2)\int \frac{y^2+1-1}{(y^2+1)^k}\,dy =$

$= \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + (2k-2)\left(\int \frac{y^2+1}{(y^2+1)^k}\,dy - \int \frac{dy}{(y^2+1)^k}\right) =$

$$= \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + (2k-2)\left(I_{k-1} - I_k\right)$$

Συνεπώς, $(2k-2)I_k = (2k-2)I_{k-1} - I_{k-1} + \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} \Rightarrow$

$$I_k = \frac{2k-3}{2k-2} I_{k-1} + \frac{1}{2k-2}\,\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}}$$

Έτσι, με αυτό τον αναδρομικό τύπο, αφού γνωρίζουμε το $I_1$, υπολογίζουμε τα $I_2, I_3, I_4, \dots$

<u>π.χ.</u>

$$I_2 = \frac{1}{2}\arctan y + \frac{1}{2}\,\frac{y}{y^2+1}$$

$$I_3 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\arctan y + \frac{1}{2}\,\frac{y}{y^2+1}\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{y}{y^2+1}.$$